

ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES A MASSES EXCENTREES

Par :
Mohamed KHAOUA
Maître de Recherche au C.G.S. (Alger).

1 INTRODUCTION

L'objet de l'étude est de présenter une méthode d'analyse dynamique des structures dont l'irrégularité dans la distribution des masses, de la rigidité des éléments ou dont les formes géométriques ou architecturales sont telles que la distinction entre le centre des masses et le centre des rigidités est plus ou moins prononcée.

L'étude se réfèrera, en tant que de besoin et pour la clarté de l'exposé, à l'exemple indiqué à la figure 1.

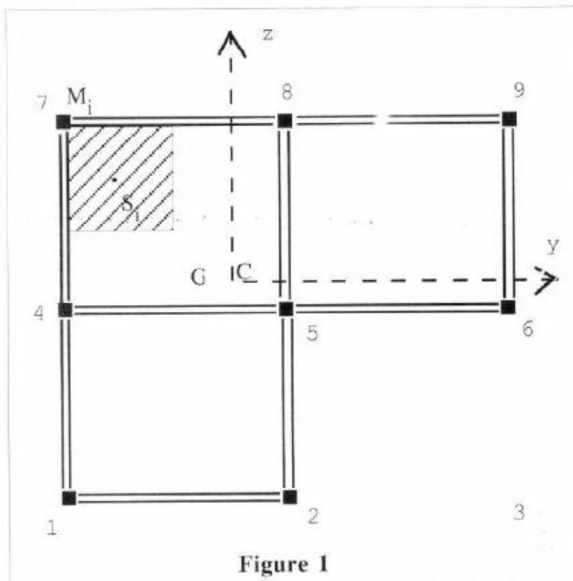


Figure 1

Cet exemple est cité à titre purement indicatif et n'est aucunement exclusif d'autres types ou formes de structures.

2 THEORIE GENERALE

2.1 Hypothèses, conventions et définitions

Considérons une structure comportant un nombre S de planchers portés, chacun, par N éléments résistants que nous appellerons éléments de rigidité. On désigne par niveau r la position d'un plancher par rapport à la base, et par étage la partie comprise entre deux niveaux consécutifs. On convient que l'étage r est caractérisé par sa masse M_r , somme des masses m_i associées aux éléments de l'étage, supposée répartie sur le plancher, et par K_r la somme des rigidités k_i des éléments.

Soit M_i le centre de rigidité d'un élément arbitraire et S_i le centre de la masse m_i associée à ce même élément. Les positions respectives du centre de rigidité C et du centre des masses G de l'étage considéré sont repérées, dans un système de coordonnées à partir d'une origine arbitraire, par les rayons vecteurs OC et OG . Nous savons, par définition, que les coordonnées de C et G sont telles que :

$$\sum (k_i \cdot CM_i) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum (k_i \cdot OC) = \sum (k_i \cdot OM_i)$$

et

$$\sum (m_i \cdot GS_i) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum (m_i \cdot OG) = \sum (m_i \cdot OS_i)$$

ce qui donne, en définitive,

$$OC = \sum (k_i \cdot OM_i) / K_r \quad \text{où } K_r = \sum k_i$$

$$OG = \sum (m_i \cdot OS_i) / M_r \quad \text{où } M_r = \sum m_i$$

k_i et m_i sont la rigidité et la masse individuelles associées à l'élément, et K_r et M_r la rigidité et la masse de l'étage r .

Choisissons un système de coordonnées $Cxyz$ dont l'origine C coïncide avec le centre de rigidité de l'étage et dont les axes Cy et Cz forment un plan confondu avec celui du plancher, l'axe Cx étant dirigé suivant la direction orthogonale, verticale en générale.

On définit, par rapport à ce repère et pour chaque plancher r , les rayons vecteurs suivants :

$$\rho_M = CM \quad \rho_S = GS \quad \rho_G = CG$$

On admet que le plancher est infiniment rigide dans son plan, autrement dit la distance relative de deux points du plancher est invariable. De même le vecteur rotation $\dot{\theta}$ ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) est constant.

De cette hypothèse découlent les conclusions suivantes :

□ la loi de composition des déplacements :

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B + \dot{\theta} \wedge \mathbf{BA} \quad (1)$$

qui énonce que le déplacement d'un point A se compose du déplacement du point B et de la rotation autour de B (le signe \wedge indique le produit vectoriel).

□ les forces et les moments intérieurs agissant sur le plancher ne dépendent, respectivement, que des déplacements et des rotations. Ainsi :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{u} \quad (2a)$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{R}] \cdot \dot{\theta} \quad (2b)$$

$[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{R}]$ sont des constantes ayant, en général, la forme de matrices.

2.2 Equations d'équilibre

La structure, précédemment définie, constitue un oscillateur multiple susceptible de vibrer sous certaines conditions. Les équations d'équilibre seront établies au vu des considérations énergétiques.

A cet effet, soit T_i l'énergie cinétique au niveau d'un élément auquel est affectée une masse m_i .

L'expression de l'énergie cinétique élémentaire s'écrit :

$$T_i = 1/2 m_s \cdot \dot{\mathbf{u}}_s^2$$

Sommons sur l'ensemble des éléments d'un étage puis sur tous les étages :

$$T = 1/2 \sum_r \sum_s (m_s \cdot \dot{\mathbf{u}}_s^2) \quad (3)$$

Telle est l'expression de l'énergie cinétique du système. Décomposons le vecteur $\dot{\mathbf{u}}_s$, vitesse de déplacement de la masse m_s , suivant la règle (1) :

$$\dot{\mathbf{u}}_s = \dot{\mathbf{u}}_G + \dot{\theta} \wedge \mathbf{GS} \quad (4)$$

où $\dot{\mathbf{u}}_G$ est la vitesse de déplacement du centre de masse du plancher qui contient S , $\dot{\theta}$ le vecteur rotatif du plancher et \mathbf{GS} le rayon vecteur reliant G à S .

Portons (4) dans (3) ; l'énergie cinétique du système prend la forme :

$$T = 1/2 \sum_r \sum_s m_s \cdot (\dot{\mathbf{u}}_G + \dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i)^2$$

Développons l'expression au carré :

$$T = 1/2 \sum_r \sum_s m_s \cdot [\dot{\mathbf{u}}_G^2 + 2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_G \cdot (\dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i) + (\dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i)^2]$$

On peut transformer cette expression en remarquant que :

$$\dot{\mathbf{u}}_G \cdot (\dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i) = (\mathbf{GS}_i \wedge \dot{\mathbf{u}}_G) \cdot \dot{\theta}$$

et

$$(\dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i) \cdot (\dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i) =$$

$$[\mathbf{GS}_i \wedge (\dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i)] \cdot \dot{\theta}$$

$$\text{d'où } T = 1/2 \sum_r \sum_s m_{s_i} \cdot \{ \dot{\mathbf{u}}_G^2 + 2 \cdot (\mathbf{GS}_i \wedge \dot{\mathbf{u}}_G) \cdot \dot{\theta} + [\mathbf{GS}_i \wedge (\dot{\theta} \wedge \mathbf{GS}_i)] \cdot \dot{\theta} \}$$

Appelons U l'énergie de déformation du système et W la somme des travaux des forces extérieures et appliquons l'équation de Lagrange sous sa forme simplifiée, en choisissant \mathbf{u}_G et $\dot{\theta}$ comme degrés de liberté indépendants. Dérivant successivement par rapport à ces deux paramètres, on obtient les deux équations vectorielles suivantes :

$$(d/dt) [\partial T / \partial \dot{\mathbf{u}}_G] + (\partial U / \partial \mathbf{u}_G) = (\partial W / \partial \mathbf{u}_G)$$

$$(d/dt) [\partial T / \partial \dot{\theta}] + (\partial U / \partial \theta) = (\partial W / \partial \theta)$$

qui se traduisent, pour chaque étage, par les équations d'équilibre

$$\sum_i (m_s \cdot \ddot{\mathbf{u}}_s) + \sum \mathbf{q}_i = \mathbf{p}_r \quad (5a)$$

$$\sum_i (\rho_s \wedge m_s \cdot \ddot{\mathbf{u}}_s) + \sum \mathbf{m}_i = \mathbf{G}_r \quad (5b)$$

\mathbf{p}_r est la somme des forces extérieures, pouvant inclure les forces de frottement,

\mathbf{G}_r est la somme des moments des forces extérieures appliquées au niveau de l'étage r ,

\mathbf{q}_i et \mathbf{m}_i sont les forces et les moments intérieurs (efforts ou forces élastiques) qui prennent naissance

dans l'élément au droit de l'étage r.

Les relations (5) traduisent les deux théorèmes fondamentaux de la mécanique à savoir le théorème de la dérivée de la quantité de mouvement et le théorème de la dérivée du moment cinétique qui constituent le fondement de la dynamique.

Nous pouvons, en vertu des principes généraux de la mécanique, remplacer la somme des forces et des moments par leurs résultantes. Les équations (5) deviennent :

$$\begin{aligned} M_r \ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{Q}_r &= \mathbf{P}_r \\ \rho_G \wedge M_r \dot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{M}_r &= \mathbf{G}_r \end{aligned}$$

$\ddot{\mathbf{u}}_r$ est l'accélération du centre des masses de l'étage, ρ_G (o, y_G, z_G) l'excentricité géométrique.

Remplaçons \mathbf{Q}_r et \mathbf{M}_r par leur expression d'après (2)

$$[\mathbf{M}_r] \cdot \ddot{\mathbf{u}}_c + [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c = \mathbf{P}_r \quad (6a)$$

$$\rho_G \wedge [\mathbf{M}_r] \cdot \dot{\mathbf{u}}_c + [\mathbf{R}_r] \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}_r \quad (6b)$$

En comparant ces deux expressions il est évident que

$$\rho_G \wedge [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c = \mathbf{R}_r \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (7)$$

au niveau d'un étage.

Nous sommes en présence d'un système de trois équations vectorielles :

$$M_r \cdot \ddot{\mathbf{u}}_c + [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{u}_c = \mathbf{P} \quad (8a)$$

$$\rho_G \wedge [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{u}_c = [\mathbf{R}] \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (8b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_c = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\theta} \wedge \rho_G \quad (8c)$$

applicables à n'importe quel étage.

De (7) nous déduisons, après multiplication vectorielle, à droite, par ρ_G :

$$(\rho_G \wedge [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c) \wedge \rho_G = ([\mathbf{R}_r] \cdot \boldsymbol{\theta} \wedge \rho_G)$$

Remplaçons dans (8c), il vient :

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_c + ((\rho_G \wedge [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c) \wedge \rho_G) / [\mathbf{R}_r]$$

et portons l'expression de \mathbf{u}_c , ainsi obtenue, dans (8a).

On établit, ainsi, l'équation d'équilibre

$$\begin{aligned} \{ M_r \cdot [\ddot{\mathbf{u}}_c + (\rho_G \wedge [\mathbf{K}_r] \cdot \ddot{\mathbf{u}}_c) \wedge \rho_G] \} / [\mathbf{R}_r] \\ + ([\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c) = \mathbf{P} \end{aligned} \quad (9)$$

Ecrite pour chaque étage et projetée sur les trois axes de coordonnées, l'équation (9) donne lieu à un système de $3 \times S$ équations différentielles à autant de variables.

Il est intéressant de remarquer que nous avons réduit un système à $6 \times N \times S$ degrés de liberté à un système à $3 \times S$ degrés de liberté. On peut, en outre, constater, sans difficulté, que le système projeté sur l'axe vertical est indépendant des deux autres et la solution s'en trouve sensiblement facilitée.

Il est possible, encore, de simplifier le processus, moyennant une hypothèse généralement admise et que nous indiquerons plus loin.

Attachons-nous pour l'instant à préciser quelques notions qui nous seront très utiles par la suite.

2.3 Energie de déformation

Considérons l'équation (8b) et multiplions, scalairement les deux membres par $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{\theta} \cdot (\rho_G \wedge [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c) = ([\mathbf{R}_r] \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\theta}$$

transformons le 1^o membre de cette égalité et remarquons que le second membre représente le double de l'énergie de rotation ; on a

$$U_{rot} = 1/2 [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c \cdot (\boldsymbol{\theta} \wedge \rho_G) = 1/2 [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_c - \mathbf{u}_c)$$

L'énergie de déformation totale du système s'obtient en ajoutant à l'expression précédente l'énergie de déplacement ($1/2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_c^2$) et en sommant sur tous les étages. Il vient alors :

$$U = 1/2 \sum [\mathbf{K}_r] \cdot \mathbf{u}_c \cdot \mathbf{u}_c \quad (10a)$$

Rappelons, par ailleurs, que l'énergie cinétique totale est :

$$T = 1/2 \sum M \cdot \dot{\mathbf{u}}_c \cdot \dot{\mathbf{u}}_c \quad (10b)$$

Il devient dès lors aisé d'écrire les équations d'équilibre du système, par application du principe de Lagrange.

2.4 Expression des rigidités de rotation

Nous avons, souvent, utilisé, dans ce qui précède, la notion de rigidité associée à la rotation que nous avons désignée par R. C'est, par définition, le coefficient de proportionnalité dont le produit par l'angle de rotation $\boldsymbol{\theta}$ est égal au moment des forces intérieures qui prend naissance au niveau des étages.

Nous nous proposons, à présent, d'évaluer l'expression de R. Nous avons, en vertu de (2b)

$$\mathbf{M}_r = [\mathbf{R}_r] \cdot \boldsymbol{\theta}_r$$

où \mathbf{M}_r et \mathbf{R}_r sont évalués au niveau d'un étage.

Le moment individuel des forces intérieures, évalué en un élément i au niveau d'un étage s'écrit, par définition :

$$\mathbf{m}_i = \rho_M \wedge k_i \cdot \mathbf{u}_M$$

Appliquons à \mathbf{u}_m la loi de composition des déplacements :

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\theta} \wedge \rho_m$$

et portons dans l'expression de \mathbf{m}_i

$$\mathbf{m}_i = \rho_m \wedge k_i \cdot \mathbf{u}_c + \rho_m \wedge k_i \cdot (\boldsymbol{\theta} \wedge \rho_m)$$

Le moment résultant des forces intérieures, au niveau d'un étage, s'obtient par sommation des moments élémentaires

$$\mathbf{M}_r = \sum \mathbf{m}_i$$

ou

$$\mathbf{M}_r = \sum \rho_m \wedge k_i \cdot \mathbf{u}_c + \sum \rho_m \wedge k_i (\boldsymbol{\theta} \wedge \rho_m)$$

Comme

$$\sum \rho_m \wedge k_i \cdot \mathbf{u}_c = 0$$

il reste, compte tenu de (2b)

$$\sum \rho_m \wedge k_i \cdot (\boldsymbol{\theta} \wedge \rho_m) = \mathbf{R}_r \cdot \boldsymbol{\theta}$$

Décomposons cette expression vectorielle suivant les trois axes de coordonnées, en remarquant que $\rho_m = (0, y_m, z_m)$, on a :

$$R_{xx} = \sum (k_z \cdot y_m^2 + k_y \cdot z_m^2) \quad (11a)$$

$$R_{yy} = \sum (k_x \cdot z_m^2) \quad (11b)$$

$$R_{zz} = \sum (k_x \cdot y_m^2) \quad (11c)$$

$$R_{yz} = R_{zy} = -\sum (k_x \cdot y_m \cdot z_m) = 0 \quad (11d)$$

La rigidité d'un étage associée à la rotation se présente, ainsi, sous la forme d'une matrice diagonale 3x3

$$[\mathbf{R}_r] = \begin{vmatrix} R_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & R_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & R_{zz} \end{vmatrix} \quad (r)$$

3 THEORIE PARTICULIERE

Nous allons nous intéresser, à présent, au cas où la force extérieure est due à un mouvement du sol, caractérisé par un déplacement \mathbf{u}_c , une vitesse $\dot{\mathbf{u}}_c$ et une accélération $\ddot{\mathbf{u}}_c$.

Les différentes formes de l'énergie s'écrivent, alors, pour un système quelconque :

$$\square \text{ Energie cinétique } T = 1/2 \sum M_r \cdot (\dot{\mathbf{u}}_c + \dot{\mathbf{u}}_t)^2 \quad (12a)$$

$$\square \text{ Energie potentielle } V = U = 1/2 \sum [K_r] \cdot \mathbf{u}_c \cdot \mathbf{u}_c \quad (12b)$$

où \mathbf{u}_c et \mathbf{u}_t (\mathbf{u}_c et \mathbf{u}_t) représentent, respectivement, les déplacements (les vitesses) du centre de masse G et du centre de rigidité C du plancher r ; S est le nombre total d'étages de la structure.

Les équations d'équilibre du système s'obtiennent par application du principe de moindre action, formalisé par les équations de Lagrange. Pour cela, écrivons ces dernières en choisissant \mathbf{u}_c comme degré de liberté indépendant. On obtient le système d'équations :

$$M_r \cdot \ddot{\mathbf{u}}_c + [K_r] \cdot \mathbf{u}_c = -M_r \cdot \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (13)$$

Ces équations se simplifient, notablement, si l'on adopte l'hypothèse, généralement admise, selon laquelle l'accélération du sol, donc l'excitation, agit suivant la direction d'un axe de coordonnées.

3.1 Accélération horizontale uniaxiale

a) - Equations d'équilibre

Supposons que la structure soit excitée par une accélération du sol dirigée suivant un axe de coordonnées, mettons l'axe C_y , pour fixer les idées. Cela veut dire que le vecteur \mathbf{u}_c se réduit à une seule composante non nulle :

$$u_{cx} = 0 \quad u_{cz} = 0 \quad u_{cy} \neq 0$$

La nullité de u_{cx} implique que u_x , θ_y et θ_z soient, également nuls.

Par ailleurs, la projection de \mathbf{u}_c sur les axes horizontaux C_y et C_z donne :

$$u_{cy} = u_y - z_c \cdot \theta_x \quad (14a)$$

et

$$0 = u_z + y_c \cdot \theta_x$$

ou

$$u_z = -y_c \cdot \theta_x \quad (14b)$$

Or d'après (8b)

$$R_{xx} \cdot \theta_x = y_c \cdot K_z \cdot u_z - z_c \cdot K_y \cdot u_y$$

$$\theta_x \cdot (R_{xx} + y_c^2 \cdot K_z) = -z_c \cdot K_y \cdot u_y$$

d'où

$$\theta_x = -(z_c \cdot K_y \cdot u_y) / (R_{xx} + y_c^2 \cdot K_z) \quad (14c)$$

portons dans (13a).

$$\mathbf{u}_{cy} = u_y \cdot (1 + ((z_c^2 \cdot K_y) / (R_{xx} + y_c^2 \cdot K_z))) \quad (15)$$

que nous écrivons, désormais, sous la forme :

$$u_{cy} = u_y \cdot \alpha_r$$

où

$$\alpha_r = 1 + ((z_c^2 \cdot K_y) / (R_{xx} + y_c^2 \cdot K_z)) \quad (16)$$

α_r est appelé coefficient d'excentricité ou d'irrégularité de la structure. Si l'excentricité est nulle $\alpha_r = 1$ et l'on retrouve les expressions données par la théorie élémentaire.

Le coefficient α_r est d'une grande importance car il réunit à lui seul toutes les caractéristiques de l'irrégularité de la structure. La valeur de α_r , qui est

supérieure ou égale à 1, mesure l'importance de l'irrégularité.

Dans ces conditions, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système s'écrivent

$$T = 1/2 \sum_r M_r (\alpha_r \cdot \dot{u}_y + \dot{u}_t)^2 \quad (a)$$

$$V = U = 1/2 \sum_r \sum_p K_{rp} \cdot u_r \cdot u_p \cdot \alpha_r \quad (b)$$

et les équations des oscillations libres s'en déduisent aisément,

$$(M_r \cdot \alpha_r) \cdot \ddot{u}_y + [K_y] \cdot u_y = 0 \quad (18)$$

où M_r est la matrice diagonale des masses et K_y la matrice de rigidité associée au vecteur déplacement u_y .

b) - Caractéristiques propres du système

Considérons le système d'équations (18) et recherchons une solution de la forme :

$$U = a_r \cdot e^{j(\omega t + \sigma)}$$

Remplaçons dans (18),

$$(-M_r \cdot \omega_n^2 \cdot \alpha_r \cdot a_r + \sum K_{rp} \cdot a_p) \cdot e^{j(\omega t + \sigma)} = 0$$

Pour avoir une solution non nulle de ce système d'équations, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice caractéristique soit nul, soit

$$\| K_{rp} - \omega_n^2 \cdot M_r \cdot \alpha_r \| = 0 \quad (19)$$

On obtient, ainsi, S racines réelles, positives, définissant S modes de vibration auxquels sont associées S valeurs des coefficients α_r .

La solution générale est la superposition des solutions particulières. Ainsi:

$$u_y = \sum_n a_r \cdot e^{j(\omega_n t + \sigma_n)}$$

c) - Analyse modale

Faisons dans l'équation précédente un changement de variables et posons

$$u_y = \sum_n A_n(t) \cdot \phi_{rn} \quad (20)$$

où $A_n(t)$ est le déplacement modal associé au mode n et ϕ_{rn} est la ième composante du vecteur propre, dans le nième mode, de la matrice caractéristique du système (19).

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système s'écrivent, alors, en variables modales :

$$T = 1/2 \sum_n M_r (\alpha_r \cdot A_n \cdot \phi_{rn} + \dot{u}_t)^2 \quad (21a)$$

$$U = V = 1/2 \sum_r \sum_p \sum_n K_{rp} \cdot \alpha_r \cdot A_n^2 \cdot \phi_{rn} \cdot \phi_{pn} \quad (21b)$$

compte tenu des conditions d'orthogonalité des modes.

Lorsqu'on applique l'équation de Lagrange, au système dont les formes de l'énergie sont données par (21), en choisissant A_n comme degré de liberté, on aboutit à une équation d'équilibre, pour chaque mode, de la forme suivante :

$$\ddot{A}_n \cdot \sum (M_r \cdot \phi_{rn}^2 \cdot \alpha_r^2) + A_n \cdot \sum \sum (K_{rp} \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn} \cdot \phi_{pn}) = -\dot{u}_t^0 \cdot f(t) \cdot \sum (M_r \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn}) \quad (22)$$

après avoir posé :

$$\ddot{u}_t = \ddot{u}_t^0 \cdot f(t)$$

où $f(t)$ est la fonction de temps de l'accélération du sol.

Simplifions encore l'écriture de l'équation (22) ci-dessus, en posant :

$$\omega_n^2 = \sum \sum (K_{rp} \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn} \cdot \phi_{pn}) / \sum (M_r \cdot \alpha_r^2 \cdot \phi_{rn}^2)$$

$$\Gamma_n = \sum (M_r \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn}) / \sum (M_r \cdot \phi_{rn}^2 \cdot \alpha_r^2)$$

ω_n est la fréquence propre du système et Γ_n le facteur de participation modal, dans le mode n. L'équation (22) devient :

$$\ddot{A}_n + \omega_n^2 \cdot A_n = -\dot{u}_t^0 \cdot \Gamma_n \cdot f(t) \quad (23)$$

La solution d'une telle équation différentielle correspond à la réponse, pour le mode n, du système à une accélération du sol ; elle s'écrit, pour un système partant du repos :

$$A_n = -(\dot{u}_t^0 \cdot \Gamma_n / \omega_n) \int_0^t f(\tau) \cdot \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (24)$$

On peut calculer l'expression du déplacement modal A_n , par intégration directe si $f(t)$ était ramenée à une forme de fonction usuelle, sinon on pourrait pratiquer une intégration pas à pas.

Dans la majeure partie des cas on se contente d'appliquer le spectre de réponse approprié.

Posons, à cet effet,

$$A_n = A_{ns} \cdot \mu_n$$

où A_{ns} est le déplacement modal statique et μ_n le facteur de sollicitation dynamique dont les expressions respectives sont :

$$A_{ns} = -(\dot{u}_t^0 \cdot \Gamma_n) / (\omega_n^2)$$

$$\mu_n = \omega_n \int_0^t f(\tau) \cdot \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

d) - Forces sismiques de niveau

On introduit la notion d'accélération spectrale dont nous savons, d'après la théorie élémentaire de la dynamique des structures, qu'elle est égale, au signe près au produit de l'accélération du sol par la valeur maximale du facteur de sollicitation dynamique, $\mu_{n,max}$.

Pour un système à plusieurs degrés de liberté l'expression de l'accélération modale est :

$$A_n = u_1^o \cdot \Gamma_n \cdot \mu_n$$

dont la valeur maximale est

$$A_{n,max} = u_1^o \cdot \mu_{n,max} = S_n$$

S_n est appelée accélération spectrale dans le mode n.

On sait, alors, que la force sismique au niveau F_r a pour expression

$$F_r = \sum_n F_{rn} = M_r \cdot \alpha_r \cdot \sum (S_n \cdot \theta_{rn} \cdot \Gamma_n) \quad (25)$$

La valeur maximale de la force sismique ne coïncide pas avec la somme des maximums des forces modales ; cela reviendrait à imposer à la structure des conditions d'une trop grande sévérité. Pour éviter ceci et demeurer dans un ordre de grandeur convenable, on prend pour force résultante la somme quadratique des forces modales. On écrit, alors :

$$F_r = M_r \cdot \alpha_r \cdot \sqrt{\sum_n (S_n \cdot \theta_{rn} \cdot \Gamma_n)^2} \quad (26)$$

Telle est la formule utilisée pour calculer les forces sismiques de niveau.

Pour les calculs pratiques, on déterminera S_n à partir du règlement, en observant que S_n dépend, en général, de la structure, de la sollicitation ainsi que de la nature des sols. C'est pourquoi le RPA 88 recommande de prendre pour S_n , le produit d'un certain nombre de facteurs qui sont :

□ une fraction D de l'accélération spectrale, appelée aussi facteur d'amplification dynamique, qui ne dépend que des caractéristiques propres (fréquence et amortissement) de la structure,

□ des coefficients A, B, Q qui prennent en compte l'intensité du seisme et sa période de retour, le type de structure exposée et la qualité de l'exécution.

L'exemple figurant à la fin de la présente étude, a été traité en application du RPA 88.

Ayant obtenu les forces, le calcul des moments est immédiat. On a, en effet :

$$M_x = y_G \cdot F_z - z_G \cdot F_y$$

Or on avait posé par définition

$$M_x = R_{xx} \cdot \theta_x$$

et compte tenu de l'expression de θ_x , figurant en (14c), on a :

$$M_x = -(z_G \cdot R_{xx} \cdot F_y) / (R_{xx} + y_G^2 \cdot K_z) \quad (27)$$

e) - Répartition des efforts dans les éléments de la structure

Pour la répartition des efforts dans les éléments de la structure, nous devons nous souvenir que la force et le moment de cette force, au niveau d'un élément s'écrivent :

$$f_i = k_i \cdot u_m$$

et

$$m_i = \rho_m \wedge k_i \cdot u_m$$

Appliquons à u_m la règle de composition des déplacements,

$$u_m = u_c + \theta \wedge \rho_m$$

portons dans les expressions précédentes et tenons compte de (14c), il vient :

$$f_y = k_y \cdot [1 + (z_G \cdot z_m \cdot K_y) / (R_{xx} + y_G^2 \cdot K_z)] \cdot F_r / K_y \quad (28a)$$

$$f_z = -k_z \cdot z_m \cdot [(y_G - y_m) / (R_{xx} + y_G^2 \cdot K_z)] \cdot F_r / K_y \quad (28b)$$

$$m_x = y_m \cdot f_z - z_m \cdot f_y \quad (28c)$$

Nous obtenons, ainsi, le résultat attendu de cette étude qui consiste à rechercher la distribution des forces horizontales et des moments de torsion dans une structure sous l'effet d'une accélération horizontale du sol.

La relation (28c) donnant l'expression du moment des forces dans un élément de structure est issue de la relation générale qui exprime le moment d'une force,

$$m_i = \rho_m \wedge f_i = \rho_m \wedge k_i \cdot (u_c + \theta \wedge \rho_m) \quad (29)$$

Nous disposons, à présent, de tous les éléments qui permettent le calcul des structures soumises à une accélération du sol.

Résumons-en les différentes étapes :

- On commence par affecter à chaque élément de la structure la masse et la rigidité qui lui reviennent.
- On détermine les coordonnées des centres de masse et de rigidité associés à chaque élément et pour chaque étage.
- On calcule l'excentricité de chaque niveau.
- On calcule les rigidités liées à la rotation (torsion dans ce cas précis).
- On détermine α_r le facteur d'excentricité (ou d'irrégularité) qui se trouve être le paramètre caractéristique de l'irrégularité de la structure.

La suite des opérations est conduite de la même manière que pour une structure centrée.

Si la direction de l'accélération du sol coïncide avec G_z , il n'y a pas lieu de faire une étude particulière ; il suffit de remarquer que la nullité de u_{Gy} entraîne

$$u_y = z_G \cdot \theta_x$$

A partir de là il est facile de vérifier qu'il suffit, dans ce qui a été dit précédemment, de changer les coordonnées y en $-z$ et vice-versa.

▼ APPLICATION :

A titre d'illustration de la méthode, nous avons traité l'exemple de la figure (1) avec les données suivantes :

- nombre de poteaux par étage : 8
- dimension des poteaux (cm) : 30 x 30
- espacement des poteaux : 4 m
- nombre de planchers : 4
- hauteur d'étage : 3 m
- masse répartie par plancher :
 - 1er 1.20 t/m²
 - 2ème, 3ème et 4ème 1.00 t/m²

Les résultats de calcul figurent en annexe(*).

Ces résultats n'appellent pas de remarques particulières, si ce n'est que chaque élément de la structure (poteau) est soumis à une force longitudinale, une force transversale, dont le résultat est une flexion biaxiale du poteau, et un moment de torsion.

3.2 Accélération verticale

L'étude du comportement d'une structure sollicitée par une accélération du sol verticale se déduit aisément de la théorie générale. Il suffit pour cela de projeter les équations vectorielles sur l'axe vertical. La démarche suivie est identique à la précédente, seules quelques paramètres vont changer, dont notamment le facteur d'excentricité, ou d'irrégularité, d'étage α_r .

Caractéristiques propres du système

Calculons au préalable, l'expression de α_r : pour ce faire projetons la relation vectorielle (8c) sur l'axe vertical C_x , on obtient :

$$u_{mx} = u_{cx} + z_G \cdot \theta_y - y_G \cdot \theta_z \quad (30)$$

D'autre part, la relation (8b) se projette, comme suit, suivant C_y et C_z :

$$z_G \cdot K_x \cdot u_x = R_{yy} \cdot \theta_y \quad (31a)$$

$$-y_G \cdot K_x \cdot u_x = R_{zz} \cdot \theta_z \quad (31b)$$

Nous avons omis l'indice r sur θ_y et θ_z afin de ne pas surcharger l'écriture. Il est évident que les relations précédentes s'appliquent à n'importe quel étage.

Résolvant, alors, ce système par rapport à θ_y et θ_z , on obtient l'expression des composantes de la rotation,

$$\theta_y = (z_G \cdot K_x \cdot u_x) / R_{yy} \quad (32a)$$

$$\theta_z = - (y_G \cdot K_x \cdot u_x) / R_{zz} \quad (32b)$$

Portons dans (30), et arrangeons l'écriture, on met en évidence la relation entre u_G le déplacement du centre des masses et u_c le déplacement du centre de rigidité, qui s'écrit alors,

$$u_{cx} = u_x \cdot \alpha_r \quad (33)$$

où

$$\alpha_r = 1 + y_G^2 \cdot K_x / R_{zz} + z_G^2 \cdot K_x / R_{yy} \quad (34)$$

Cette relation posée, la suite des opérations se déroule exactement comme précédemment. Aussi, et sachant que toutes les opérations qui vont suivre ne sont qu'une répétition, nous nous bornerons à en donner les principales formules.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$M_r \cdot \ddot{u}_r \cdot \alpha_r + \sum K_{rp} \cdot u_p = 0 \quad (35)$$

On écrit la solution d'un tel système sous la forme

$$U = a \cdot e^{j(\omega t + \sigma)}$$

Portons ceci dans (35), effectuons et simplifions, nous obtenons un système d'équations tel que la matrice caractéristique du système soit nulle :

$$\| K_{rp} - M_r \cdot \alpha_r \cdot \omega^2 \| = 0 \quad (36)$$

Nous reconnaissons un problème de valeurs et de vecteurs propres. Les S racines de l'équation (36) fournissent les S pulsations ou fréquences du système. A chaque fréquence, à laquelle il correspond un mode d'oscillation, est associé un vecteur propre a .

Il est plus commode d'introduire les variables modales du système. A cet effet posons

$$U_r = \sum_n u_{rn} = \sum_n A_n \cdot \phi_{rn}$$

où, comme auparavant, A_n est le déplacement modal et

(*) Les calculs ont été exécutés à l'aide du programme FORSIS (FORces SISmiques) élaboré conformément à l'étude décrite.

ϕ_{rn} le coefficient de forme. Introduisons les variables modales dans l'expression de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation :

$$T = 1/2 \sum_r \sum_n [M_r (A_n \cdot \phi_{rn} \cdot \alpha_r + u_r)^2]$$

$$U = 1/2 \sum_r \sum_p \sum_n K_{rp} \cdot \alpha_r \cdot A_n \cdot \phi_{rn} \cdot A_p \cdot \phi_{pn}$$

De l'application du principe de moindre action, on déduit l'équation modale:

$$\ddot{A}_n + \omega_n^2 \cdot A_n = - \ddot{u}_t^0 \cdot \Gamma_n \cdot f(t) \quad (37)$$

où, comme précédemment, Γ_n est le facteur de participation modale pour le mode n. La réponse modale $A_n(t)$ se calcule par intégration de l'équation (37) ; de même, on aboutit au calcul de tous les paramètres utiles, en suivant la démarche habituelle. Nous nous contenterons de donner les principaux résultats.

Le déplacement modal et l'accélération modale maximum sont :

$$A_{n,max} = - (u_t^0 / \omega_n^2) \cdot \Gamma_n \cdot \mu_{n,max}$$

$$\ddot{A}_{n,max} = - \omega_n^2 \cdot A_{n,max} = S_n \cdot \Gamma_n$$

où S_n est l'accélération spectrale.

On calcule, ainsi :

□ les forces sismiques de niveau :

$$F_r = M_r \cdot \alpha_r \cdot \sqrt{\sum (S_n \cdot \Gamma_n \cdot \phi_{rn})^2} \quad (38)$$

□ les forces sismiques dans les éléments :

$$f_x = k_x (F_x / K_x) \cdot [1 + (z_m \cdot z_G \cdot k_x) / R_{yy} + (y_m \cdot y_G \cdot K_x) / R_{zz}] \quad (39)$$

□ les moments dans les éléments :

$$m_y = z_m \cdot f_x \quad (40)$$

$$m_z = - y_m \cdot f_x$$

Nous mettons, ainsi, en évidence un phénomène extrêmement important : l'action d'une accélération verticale sur une structure excentrée provoque un déplacement vertical et une rotation biaxiale suivant les deux axes horizontaux, induisant, respectivement, une force verticale (effort normal dans les poteaux), et des moments (efforts de flexion biaxiale pure dans les poteaux).

La structure se comporte comme si elle était soulevée (ou affaissée) tout en ayant tendance à basculer.

L'exemple traité, précédemment, a été étendu à ce

cas. Nous avons repris les mêmes données : la nature de ces dernières est demeurée inchangée, mais leur valeur est, évidemment, différente.

Les résultats figurent en annexe du présent document.

Pour terminer, il convient de faire deux remarques :

○ La méthode exposée ci-dessus, bien qu'illustrée par un exemple de structure en poteaux, est absolument générale et s'applique à tous les types d'éléments (voiles, mixtes etc...) pour peu que l'on en définisse les rigidités.

○ En outre, la direction des axes de coordonnées ne coïncide pas, forcément, avec l'orientation des axes principaux de la section des éléments. Autrement dit, la structure peut être de forme quelconque.

CONCLUSIONS

Nous sommes à même de dégager quelques conclusions de l'étude précédente.

Nous remarquons tout d'abord que lorsqu'une structure excentrée est sollicitée par une accélération horizontale du sol, les masses subissent un déplacement horizontal et une rotation autour de l'axe vertical. Elle est, en conséquence, le siège d'efforts de flexion, accompagnés d'efforts tranchants, ainsi que de torsion. Ceci se traduit, au niveau de chaque élément de la structure, par l'apparition d'efforts correspondants. Il est important de contrôler, dans ce cas, les déplacements latéraux afin d'empêcher, entre autres, la manifestation du phénomène dit "P".

En revanche, lorsque la structure est excitée par une accélération verticale du sol, ses éléments sont le siège d'efforts normaux et de moments de flexion (flexion pure). Le phénomène d'instabilité susceptible de se produire est le flambement.

Enfin, il convient, dans tous les cas, d'accorder une attention particulière à la conception et au calcul des fondations.

COMPLEMENT

SYSTEMES A MASSES EXCENTREES AMORTIS

Si l'étude précédente n'a pas pris, explicitement, en considération l'amortissement, il est aisé d'en tenir compte. Pour ce faire, il suffit d'ajouter, à l'énergie potentielle du système, l'énergie de dissipation qui a pour expression générale :

$$\Phi = - 1/2 \sum C_r \cdot \dot{u}_c \cdot \dot{u}_c$$

où C_r est le coefficient de frottement de l'étage r.

Si, par ailleurs, le système est excité par une accélération au sol dirigée suivant un des axes de coordonnées, le déplacement du centre de masse, dans la direction envisagée, se déduit du déplacement du centre de rigidité, comme

cela a été montré plus haut, au moyen de la relation :

$$u_c = \alpha_r \cdot u_e$$

α_r est, comme on le sait, le facteur d'excentricité approprié.

Dans ces conditions, l'application, au système, du principe de moindre action, en prenant u_c comme degrés de liberté conduit au système d'équations d'équilibre suivant :

$$M_r \cdot \alpha_r \cdot \ddot{u}_c + C_r \cdot \dot{u}_c + \sum K_{rp} \cdot u_c = -M_r \cdot \ddot{u}_t \quad (41)$$

Introduisons la variable v telle que :

$$v = u_c \cdot e^{\delta_r t} \quad \text{où} \quad u_c = v \cdot e^{-\delta_r t}$$

où l'on a posé

$$\delta_r = C_r / (2 \cdot M_r)$$

Les équations (41) deviennent, alors :

$$M_r \cdot \alpha_r \cdot \ddot{v} + (\sum K_{rp} - \delta_r^2) \cdot v = -M_r \cdot \ddot{u}_t \cdot e^{\delta_r t} \quad (42)$$

La recherche des caractéristiques propres du système nécessite la résolution des équations (42) sans second membre.

Si nous recherchons une solution de la forme

$$v = e^{j(\Omega t + \sigma)}$$

Le système d'équations (42), dont le second membre sera omis, donnera une solution non nulle si le déterminant de l'équation caractéristique est nul, autrement dit :

$$\| (K_{rp} - \delta_r^2) - \Omega^2 M_r \cdot \alpha_r \| = 0 \quad (43)$$

L'équation, ainsi obtenue, possède S racines Ω réelles et positives, caractérisant S modes d'oscillations de la structure ; à chaque racine, ou valeur propre de la matrice caractéristique, correspond un vecteur propre dont nous savons qu'il détermine les formes propres de l'oscillation.

Ayant déterminé les fréquences Ω_n des différents modes de vibration, il est plus commode d'introduire les variables modales.

Posons à cet effet :

$$v = \sum_n A_n \cdot \phi_{rn}$$

et portons dans l'expression des différentes formes de l'énergie, puis appliquons le principe de moindre action, en

considérant le déplacement modal A_n comme degré de liberté. Il vient, alors :

$$\begin{aligned} \ddot{A}_n \cdot (\sum M_r \cdot \alpha_r^2 \cdot \phi_{rn}^2) + \dot{A}_n \cdot (\sum C_r \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn}^2) \\ + A_n \cdot (\sum K_{rp} \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn} \cdot \phi_{pn}) = -\ddot{u}_t \cdot \sum M_r \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn} \end{aligned} \quad (44)$$

Comme cela a été dit plus haut, à propos des système non amortis, les équations (44) se simplifient si nous posons

$$2 B_n = (\sum C_r \cdot \alpha_r \cdot \phi_{rn}^2) / (\sum M_r \cdot \alpha_r^2 \cdot \phi_{rn}^2)$$

ω_n et Γ_n , étant tels que définis précédemment.

B_n est le pourcentage de l'amortissement critique ou, tout simplement, amortissement.

L'équation (44) s'écrit, alors

$$\ddot{A}_n + 2 \cdot B_n \cdot \dot{A}_n + \omega_n^2 \cdot A_n = \ddot{u}_t \cdot \Gamma_n \cdot f(t) \quad (45)$$

Nous sommes ramenés à l'équation d'un système à un degré de liberté dont la solution est :

$$A_n = -(\ddot{u}_t \cdot \Gamma_n) / \Omega_n \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\beta_n(t-\tau)} \sin \Omega_n(t-\tau) d\tau \quad (46)$$

où Ω_n est telle que $\Omega_n^2 = \omega_n^2 - \beta_n^2$.

Ω_n est appelée fréquence du système amorti,

ω_n est la fréquence du système non amorti,

et β_n l'amortissement modal du système.

Introduisons le facteur de sollicitation dynamique μ_n défini comme précédemment par

$$\mu_n = \Omega_n \cdot \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\beta_n(t-\tau)} \sin \Omega_n(t-\tau) d\tau$$

La relation (45), qui fournit l'expression de la réponse du système devient :

$$A_n = -(\ddot{u}_t \cdot \mu_n \cdot \Gamma_n) / \Omega_n^2$$

L'accélération modale est :

$$\ddot{A}_n = -(\Omega_n^2 \cdot A_n)$$

ou

$$\ddot{A}_n = \ddot{u}_t \cdot \mu_n \cdot \Gamma_n$$

L'accélération modale maximale, intervient lorsque le facteur de sollicitation dynamique μ_n est maximum. On définit, comme auparavant, l'accélération spectrale S_n et on l'introduit dans le calcul des forces sismiques.

En pratique, l'amortissement est pris en compte dans le spectre d'accélération dont il est un paramètre du choix $\textcircled{4}$

EXEMPLE DE CALCUL (V. II - 1)

RESULTATS

I - ACCELERATION HORIZONTALE/OY

A - CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES

◆ **CARACTERISTIQUES DE FORME**

ETAGE	MODE 1	MODE 2	MODE 3	MODE 4
1	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.857	0.879	- 0.609	- 2.131
3	2.492	- 0.063	- 0.895	- 2.069
4	2.828	- 0.946	0.763	- 0.848

◆ **CARACTERISTIQUES PROPRES**

MODE	FREQ.	PER.	FAC.PART.
1	13.252	0.474	0.444
2	37.065	0.170	0.373
3	56.541	0.111	0.156
4	71.148	0.088	0.027

B - FORCES SISMIQUES

ETAGE	FORCE // OY	FORCE // OZ	MOMENT // OX
1	3.752	0.000	- 0.001
2	4.143	0.000	0.000
3	4.903	0.000	0.000
4	5.602	0.000	0.000

REPARTITION DES FORCE

NIVEAU	ELEMENT	FORCE // OY	FORCE // OZ	MOMENT // OX
1	1	0.469	0.000	2.110
	2	0.469	0.000	2.110
	4	0.469	0.000	0.234
	5	0.469	0.000	0.234
	6	0.469	0.000	0.234
	7	0.469	0.000	- 1.642
	8	0.469	0.000	- 1.641
	9	0.469	0.000	- 1.642
	2	1	0.518	0.000
2		0.518	0.000	2.330
4		0.518	0.000	0.259
5		0.518	0.000	0.259
6		0.518	0.000	0.259
7		0.518	0.000	- 1.812
8		0.518	0.000	- 1.812
9		0.518	0.000	- 1.812

3	1	0.613	0.000	2.758
	2	0.613	0.000	2.758
	4	0.613	0.000	0.306
	5	0.613	0.000	0.306
	6	0.613	0.000	0.306
	7	0.613	0.000	-2.145
	8	0.613	0.000	-2.145
	9	0.613	0.000	-2.145
	4	1	0.700	0.000
2		0.700	0.000	3.151
4		0.700	0.000	0.350
5		0.700	0.000	0.350
6		0.700	0.000	0.350
7		0.700	0.000	-2.451
8		0.700	0.000	-2.451
9		0.700	0.000	-2.451

II ACCELERATION HORIZONTALE // OZ

A - CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES

◆ CARACTERISTIQUES DE FORME

ETAGE	MODE 1	MODE 2	MODE 3	MODE 4
1	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.857	0.879	0.609	2.131
3	2.492	-0.063	-0.895	2.069
4	2.829	-0.946	0.763	-0.848

◆ CARACTERISTIQUES PROPRES

MODE	FREQ.	PER.	FAC.PART
1	13.215	0.475	0.442
2	36.960	0.170	0.371
3	56.381	0.111	0.155
4	70.946	0.039	0.027

B - FORCES SISMIQUES

ETAGE	FORCE // OY	FORCE // OZ	MOMENT // OX
1	0.000	3.728	1.2
2	0.000	4.113	-1.3
3	0.000	4.866	-1.622
4	0.000	5.560	-1.853

REPARTITION DES FORCES

NIVEAU		ELEMENT FORCE // OY	FORCE // OZ	MOMENTS // OX
1	1	0.036	0.494	1.890
	2	0.036	0.462	0.070
	4	- 0.004	0.494	1.230
	5	- 0.004	0.462	0.229
	6	0.004	0.430	1.933
	7	0.028	0.494	1.824
	8	0.028	0.462	0.133
	9	0.028	0.430	1.838
	2	1	0.040	0.545
2		0.040	0.545	0.077
4		0.004	0.545	1.909
5		- 0.004	0.510	0.253
6		- 0.004	0.475	2.133
7		0.031	0.545	2.015
8		0.031	0.510	0.147
9		0.031	0.475	2.028
3		1	0.047	0.045
	2	0.047	0.603	0.021
	4	0.005	0.645	2.259
	5	0.005	0.603	0.299
	6	0.005	0.560	2.524
	7	0.036	0.645	2.384
	8	0.036	0.603	0.174
	9	0.036	0.562	2.299
	4	1	- 0.053	0.737
2		- 0.053	0.689	0.104
4		- 0.006	0.737	2.581
5		- 0.006	0.689	0.342
6		- 0.006	0.642	2.884
7		0.042	0.737	- 2.723
8		0.042	0.689	0.199
9		0.042	0.642	2.741

III - ACCELERATION VERTICALE

A - CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES

◆ **CARACTERISTIQUES DE FORME**

ETAGE	MODE 1	MODE 2	MODE 3	MODE 4
1	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.857	0.879	- 0.602	- 2.131
3	2.492	- 0.063	0.895	2.069
4	2.829	- 0.946	0.763	- 0.848

◆ **CARACTERISTIQUES PROPRES**

MODE	FREQ.	PER.	FAC. PART.
1	131.774	0.048	0.439
2	368.556	0.017	0.369
3	562.215	0.011	0.154
4	707.455	0.009	0.027

B - FORCES SISMIQUES

ETAGE	FORCE // OX	MOMENT // OY	MOMENT // OZ
1	1.438	0.000	0.479
2	1.894	0.000	0.634
3	2.426	0.000	0.809
4	2.760	0.000	0.920

REPARTITION DES FORCES

NIVEAU	ELEMENT	FORCE // OX	MOMENT // OY	MOMENT // OZ
1	1	0.201	- 0.905	0.704
	2	0.177	- 0.795	- 0.088
	4	0.201	- 0.101	0.704
	5	0.177	- 0.088	- 0.088
	6	0.152	- 0.076	- 0.684
	7	0.201	0.704	0.704
	8	0.177	0.618	- 0.088
	9	0.152	0.532	- 0.684
	2	1	0.265	- 1.193
2		0.233	- 1.047	- 0.116
4		0.265	- 0.133	0.929
5		0.233	- 0.116	- 0.116
6		0.200	- 0.100	- 0.901
7		0.265	0.928	0.928
8		0.233	0.814	- 0.116
9		0.200	0.701	- 0.901
3		1	0.340	- 1.528
	2	0.298	- 1.341	- 0.149
	4	0.340	- 0.170	1.188
	5	0.298	0.149	0.149
	6	0.257	- 0.128	- 1.155
	7	0.340	1.188	1.188
	8	0.298	1.043	- 0.149
	9	0.257	0.898	- 1.155
	4	1	0.386	1.738
2		0.339	- 1.526	- 0.170
4		0.386	- 0.193	1.352
5		0.339	- 0.170	- 0.170
6		0.292	- 0.146	- 1.314
7		0.386	1.352	1.352
8		0.339	1.187	- 0.170

NOTA : Les vecteurs sont indiqués en " gras " .